ರಚನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ: ಸುವರ್ಣ ಆಯತಾಕಾರದಿಂದ ಸುವರ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜದವರೆಗೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಆಚೆಗೆ

ಭಾಗ 1

ಮೈಕಲ್ ಡಿ ವಿಲ್ಲಿಯರ್ಸ್

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಬೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಂಬಿಕೆ ನಿರಂತರವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ನಿಮಗನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿಯೂ ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಹಾಗು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸುವ ಮುನ್ನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ನೀಡುವುದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 'ಒಳ್ಳೆಯ ಅಭ್ಯಾಸ' ಎನ್ನುವುದು (ಅಡಿಟಿಪಟ್ಟಣಿ1 ನೋಡಿ) ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು ಎಂಬುದೇ ಆ ನಂಬಿಕೆಯಾಗಿದೆ. [1] ಈ ನಿಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ, ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

- *ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ:* ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು, ಅರ್ಧ ಆವರ್ತದ ಸಮಮಿತಿ ಇರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ (ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಕುರಿತು ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳಿಗೆ ಲೇಖನದ ಕೊನೆಯನ್ನು ನೋಡಿ.)

[1] ಎಲ್ಲಾ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು ಬೋಧನೆಯ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪರಿಪಾಠಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಸೆರಾ(2008)ದಂತಹ ಕೆಲವು ಶಾಲೆಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮತ್ತು ವರ್ಗೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ವತಃ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಪೂರಕವಾಗುವಂತಹ ಗಂಭೀರ ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿವೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇಂದಿನ ಬಹುತೇಕ ಪರಿಚಯಾತ್ಮಕ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ, ನಿಷ್ಪನ್ನೀಕರಣವು (ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್) ಫಲನವೊಂದರ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಮಿತಿ ನಿರ್ದೇಶಿತ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವ ಮುನ್ನ ಅಥವಾ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಫಲನದ ತಕ್ಷಣದ ... ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಮುನ್ನ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ರಚನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ; ಸುವರ್ಣ ಆಯತ; ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ; ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

- ಸಂಖ್ಯೆ $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$
- *ಫಲನ:* ಗಣ Aಯಿಂದ ಗಣ Bಗೆ ಇರುವ f ಫಲನವು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ, A ಯಿಂದ B ಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ:

   1. $\langle a, b\rangle$ ಸಂಬಂಧ ಏರ್ಪಟ್ಟಲ್ಲಿ, A ಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶ aಗೆ, B ಗಣದ ಒಂದು ಅಂಶ b ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ.
   2. $\langle a, b\rangle$ ಮತ್ತು $\langle a, c\rangle$ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $b = c$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ ಬಳಿಕ, ಅವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳ್ಳುವಂತಾಗಲು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಯಾವುವು ಹಾಗು ಯಾವುವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿದರ್ಶನಗಳ ಸಮೇತ ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಹಳವಾಗಿ ಜನಪ್ರಿಯವಾಗಿರುವ ಈ ವಿಧಾನದ ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಅದು ಗಣಿತವು ಯಾವಾಗಲೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ತಪ್ಪು ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಸಮಾನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮರೆಮಾಚುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ, ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ಎಲ್ಲಿಂದ ಬಂದಿತು ಮತ್ತು ಯಾವ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಆರಿಸಲಾಯಿತು ಎಂಬುದನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಿದ್ಧವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ನೀಡುವುದರಿಂದ, ಅವರು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅವಕಾಶದಿಂದ ವಂಚಿತರಾಗುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ದುರಾದೃಷ್ಟವಶಾತ್, ಇದು ಅವರಿಗೆ ಗಣಿತವು 'ಪರಿಪೂರ್ಣತಾವಾದಿ' ವಿಜ್ಞಾನ ಎಂಬ ಚಿತ್ರಣ ನೀಡುತ್ತದೆ (ಏರ್ನೆಸ್ಟ್, 1991).

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳು ಇವೆ, ಅವುಗಳು ವಿವರಣಾತ್ಮಕ (ಅನುಮಾನಾತ್ಮಕವಾದ) ಮತ್ತು ರಚನಾತ್ಮಕ (ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ತಿಳಿಸಿದ) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು. ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ, ಆದರೆ, ರಚನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಹೊಸ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ (ಫ್ರಿಡೆಂಥಲ್, 1973).

ನಾನು ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಪರಿಶೋಧಿಸಿದ 'ಸುವರ್ಣ ಆಯತ' ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಾದ 'ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ', 'ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ', 'ಸುವರ್ಣ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ', 'ಸುವರ್ಣ ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿ' ಮುಂತಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ರಚನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸ್ವಯಂ-ಕಲಿಕೆಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದೇ ಈ ಲೇಖನದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸರಳ ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೂ, ಇವುಗಳ ಚರ್ಚೆಯು ರಚನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಆಳವಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೇಲೆ ಬೆಳಕು ಚೆಲ್ಲುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ.

'ಸುವರ್ಣ ಆಯತ'

ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು

> *"...ಕ್ರಮಾವಳಿ ಅನುಸಾರ ರಚನಾತ್ಮಕವಾದ ಮತ್ತು ಸೃಜನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು... ಹೊಸ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪರಿಚಿತ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ."*
>
> –ಹಾನ್ಸ್ ಫ್ರೂಡೆಂತಲ್ (1973: 458)

ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುವ, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವ, ವಿಶೇಷೀಕರಿಸುವ, ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಅಥವಾ ಬದಲಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿ, ಆ ಮೂಲಕ ಹೊಸ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿದಾಗ ರಚನಾತ್ಮಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ನಡೆಯುತ್ತದೆ.

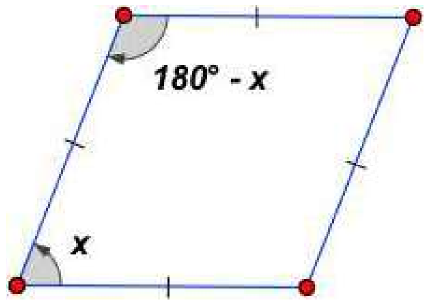
ಒಂದು ಆಯತ (ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮ) ಮತ್ತು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ (ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ) (ಡಿ ವಿಲ್ಲರ್ಸಿನ 2009:55 ನೋಡಿ) ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಬಾಹು-ಕೋನ ದ್ವಿತ್ವ ಇರುವುದರಿಂದ, ನಾನು ಇತ್ತೀಚೆಗೆ, 'ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ'ಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ಯೋಚಿಸುತ್ತಿದ್ದೆ. ಯಾವ ಆಯತದ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತ ಫೈ = 1.618.. ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅವೇ ಸುವರ್ಣ ಆಯತಗಳು ಎಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸುತ್ತ, ನಾನು ಇದೇ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಾದೃಶ್ಯವಾಗಿ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೇನೆ. (ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದ ವಿವರಣೆಗಾಗಿ ಲೇಖನದ ಕೊನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯೇ ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ.

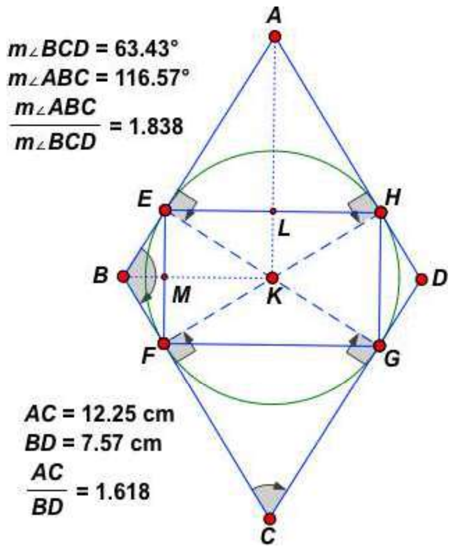
x ಅನ್ನು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಲಘು ಕೋನ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಾಗ, ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ:

$$\frac{180^\circ - x}{x} = \phi, \quad \therefore x = \frac{180^\circ}{1+\phi} \approx 68.75^\circ.$$

ಈ ಕೋನದ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟ 'ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ'ಯ ನಿಖರವಾದ ನಿರ್ಮಾಣವನ್ನು ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1. ಅನುಪಾತ ϕ ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ.



ಚಿತ್ರ 2. ಅನುಪಾತ ϕ ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಇರುವ ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ.

ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ನೋಡಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಆಕರ್ಷಣೀಯವಾಗಿದ್ದರೂ, ನಾನು ಇನ್ನೂ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸಮಂಜಸವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು ಅಥವಾ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಯೋಚಿಸುತ್ತಿದ್ದೆ. ಆಯತವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ಒಳವೃತ್ತವನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, ನನಗೆ ಸುವರ್ಣ ಆಯತ $EFGH$ ($\frac{EH}{EF} = \phi$) ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತ (ಸರ್ಕಮ್‌ಸರ್ಕಲ್) ದೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ನಂತರ ಆಯತದ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವಂತಹ $ABCD$ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಆಲೋಚನೆಯು ಮೂಡಿತು. ($EFGH$ ಆಯತವು ಸಮಮಿತಿಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ $ABCD$ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ನನ್ನ ಬೆರಗಿಗೆ ಕಾರಣವಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ - ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ನಿಖರವಾದ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಡೈನಮಿಕ್ ಜ್ಯಾಮೆಟ್ರಿ ಸಾಫ್ಟ್‌ವೇರ್‌ಗಳ ಬಳಕೆಯಿಂದ ರಚಿಸಿದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರಲಿಲ್ಲವಾದರೂ, ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇದ್ದವು!

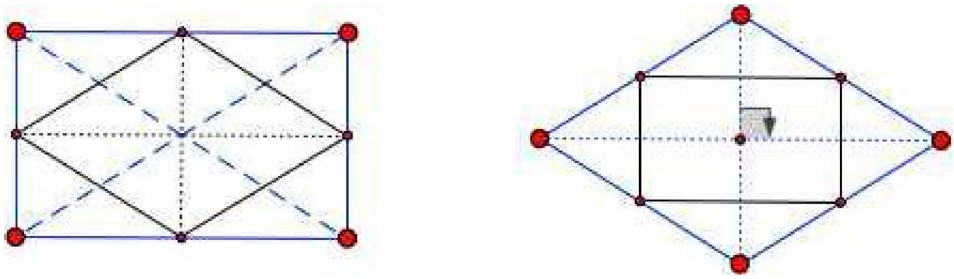
ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಏಕೆ ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ABK ಮತ್ತು KEM ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಅನುಸರಿಸುತ್ತದೆ,

$$\frac{AK}{BK} = \frac{KM}{EM}$$

ಆದರೆ $KM = LE$; ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{AK}{BK} = \frac{LE}{EM}$$

ಆದರೆ ಈ ಉದ್ದಗಳು (AK, BK); (LE, EM) ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳ ಮತ್ತು ಆಯತದ ಬಾಹುಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಅಳತೆಗಳಾಗಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ, $ABCD$ ಸುವರ್ಣ ಆಯತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿಯೇ ಆ ಫಲಿತಾಂಶವು ರೂಪುಗೊಂಡಿದೆ. ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದಾಗಿದ್ದು ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು ಓದುಗರಿಗೇ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸುವರ್ಣ ಆಯತ ಮತ್ತು ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣವೆಂದರೆ $\tan \angle EKF = \tan \angle BCD = 2$. ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ದ್ವಿಕೋನ ಟ್ಯಾನ್ ಸೂತ್ರದ ಅನ್ವಯದ ಮೂಲಕ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು, ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಕೂಡ ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸದ ಭಾಗವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಓದುಗರಿಗೇ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3. ಸುವರ್ಣ ಆಯತ ಮತ್ತು ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವ್ಯಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಗಣಿತದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಒಂದು ಹಂತದವರೆಗೆ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾದುದರಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ನೋಟದಿಂದ ಅಥವಾ ಸೌಂದರ್ಯಪ್ರಜ್ಞೆಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಯಾವುದಾದರು ಒಂದಕ್ಕೆ ಆದ್ಯತೆ ನೀಡಲು ಯಾವುದೇ ಮನೋವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕಾರಣವಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದಲೂ (ಅಡಿಟಿಪ್ಪಣಿ[2] ನೋಡಿ), ಮುಂಚೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾದ ಯಾವುದೇ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ನಮ್ಮ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ, 'ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ' ಎರಡನೇ ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಪರವಾಗಿ ಉತ್ತಮ ವಾದವನ್ನು ಮಂಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ, ಏಕೆಂದರೆ ಅದು ಸುವರ್ಣ ಆಯತದೊಂದಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ನೇರವಾದ ಸಂಪರ್ಕವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಸಮಾನವೆನಿಸುವ ಎರಡು ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಹೀಗೆ ಮರು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು: 1) ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಸುವರ್ಣ ಆಯತದ ಶೃಂಗಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಆ ಆಯತದ ಪರಿವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಚತುರ್ಭುಜ. ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಸರಳವಾಗಿ 2) ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಜ್ರಾಕೃತಿ (ಅಡಿಟಿಪ್ಪಣಿ[3]).

ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ, ಸುವರ್ಣ ಆಯತ ಹಾಗು ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು (ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 'ವಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ) ನೀಡುವ ಮುಖಾಂತರ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದ್ವಿತ್ವ ಸಂಬಂಧ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಚಿತ್ರಿತವಾಗಿದ್ದು, ಈ ಚಿತ್ರಣವು ಎರಡನೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಪುಷ್ಟಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಸುವರ್ಣ ಆಯತದ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ತತ್ಸಂಬಂಧಿತ ವ್ಯಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂಬುದು ಸಹಜವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ; ಇನ್ನು ಅದರ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸುವರ್ಣ ಆಯತದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ, ಆ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಹ ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ಒಂದು ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವ್ಯಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸುವರ್ಣ ಆಯತ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ರಚನಾತ್ಮಕವಾಗಿ 'ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ'ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು

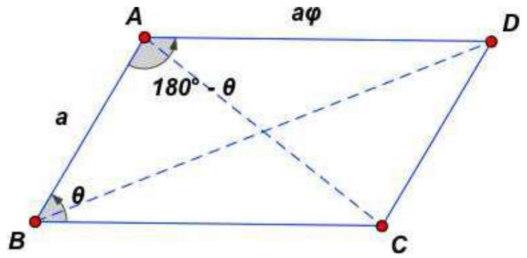
ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕಾರವು ಮಾರ್ಪಡಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮುಂಚೆ ಹೇಳಲಾದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ 'ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು' ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು ಸಹಜವೆನಿಸುತ್ತದೆ: ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆ: ಚಿತ್ರ 4ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{AC} = \phi$$

[2]ಕಲೆ, ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪ ಮತ್ತು ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ, ಅದರ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಆದ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಆಗಾಗ್ಗೆ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ವಿಭಿನ್ನ ಆಕಾರದ ಆಯತಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಜನರ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಆದ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೈಗೊಂಡ ಹಲವಾರು ಮನೋವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಅಧ್ಯಯನಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಇತರ ಅನುಪಾತಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ಪಷ್ಟ ಆದ್ಯತೆಯೇನಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು. (ಉದಾ: ಗ್ರೋಸ್ಮೆನ್ ಮತ್ತು ಇತರರು, 2009, ಸ್ಟೀಗರ್ ಮತ್ತು ಸ್ವಾಮಿ, 2015 ನೋಡಿ) ಇಂತಹ ಒಂದು ಸಂಶೋಧನೆಯು ಅಷ್ಟೇನು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ 1.618 ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳನ್ನು, ಅಥವಾ 1.6, 1.55, 1.65 ಅಥವಾ, 1.5, 1.7 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಉಳ್ಳ ಆಯತಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ಗುರುತಿಸುವುದು ಮೇಲ್ನೋಟಕ್ಕೆ ಅಸಾಧ್ಯ ಎನಿಸುತ್ತದೆ.

[3]ನಂತರದ ಅಂತರ್ಜಾಲದ ಹುಡುಕಾಟವು ಒಂದು ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೋನಗಳ ಅನುಪಾತದ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಇಲ್ಲಿನಂತೆಯೇ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ಬಹಿರಂಗಪಡಿಸಿತು. https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rhombus. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಪುಷ್ಟೀಕರಿಸಲು, ಹಲವು ಬಹುಮುಖಾಕೃತಿಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಮ್ಮ ಮುಖಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬರುವಂತೆ ಮರುರೂಪಿಸಿದಾಗ, $\angle ABC$ಯು ಸರಿಸುಮಾರು 60° ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬಂದಿತು.



ಚಿತ್ರ 4. ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಈ ಅನುಮಾನೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗಿರಲಿಲ್ಲ.. ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ $a = 1$ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದಿಂದ ಈ ಅಂಶ ಸ್ಫುರಿಸುತ್ತದೆ:

$$AC^2 = 1^2 + \phi^2 - 2\phi\cos\theta,$$
$$BD^2 = 1^2 + \phi^2 + 2\phi\cos\theta.$$

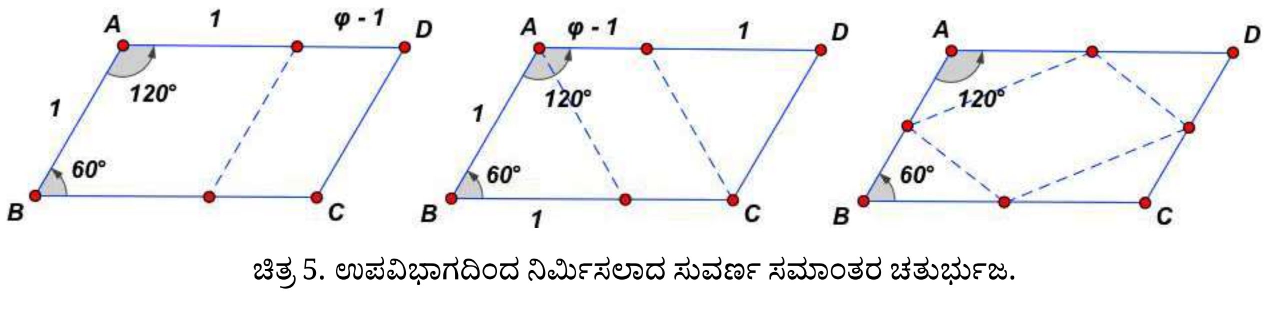
ಆದರೆ, $\frac{BD}{AC} = \phi$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮುಂದಿನ ಹಂತ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ:

$$\frac{1^2 + \phi^2 + 2\phi\cos\theta}{1^2 + \phi^2 - 2\phi\cos\theta} = \phi^2.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\cos\theta$ ಗಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ϕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ,

$$\cos\theta = \frac{\phi^4 - 1}{2(\phi + \phi^3)} = \frac{1}{2},$$

ಇದು $\theta = 60^\circ$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನಾನು ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಮಂಡಿಸಿದ ಅನುಮಾನೋಕ್ತಿ ನಿಜವೇ ಎಂದು ಸಾಬೀತಾಯಿತು. ತತ್ಫಲವಾಗಿ, ತನ್ನ ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೂ 'ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾದ' 60° ಮತ್ತು 120° ಇರುವ ಮತ್ತು ನೋಡಲು ಆಕರ್ಷಕವಾಗಿ ಕಾಣುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದಾದರೆ ಲಘು ಕೋನ 60° ಇರುವ ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ[4] ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನಬಹುದು; ಅಥವಾ, ಲಘು ಕೋನ 60° ಇರುವ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಉಳಿದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಈ ಅನುಕೂಲಕರ, ಪರ್ಯಾಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಆಸಕ್ತ ಓದುಗರ ಪರಿಶೀಲನೆಗೆಂದು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5. ಉಪವಿಭಾಗದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

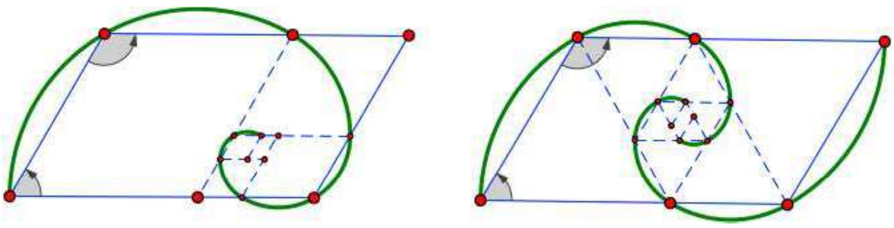
ಸುವರ್ಣ ಆಯತವು ಹೊಂದಿರುವ ಆಕರ್ಷಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೂ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಚಿತ್ರ 5ರ ಮೊದಲ ಎರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ನೋಡುವುದಾದರೆ, ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು

[4] ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲದ ನಂತರ, ವಾಲ್ಸರ್ (2001, ಪುಟ 45) ಸಹ ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಲಘು ಕೋನ 60° ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆ.

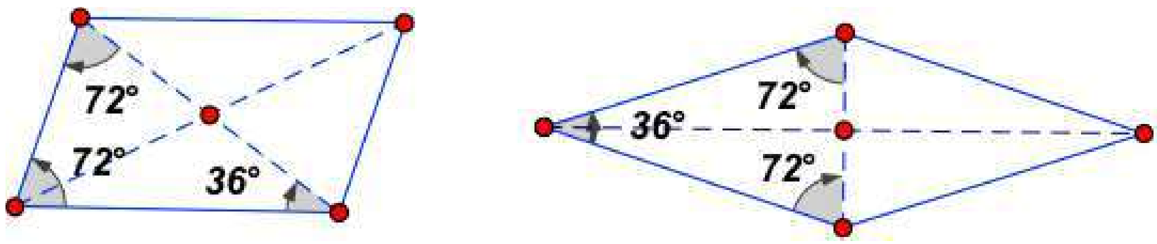
ತುಂಡರಿಸುವುದರಿಂದ ಅಥವಾ, ಅದರ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇದು ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಎರಡೂ ನಿದರ್ಶನಗಳಲ್ಲಿ 60° ಲಘು ಕೋನ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಿಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $a = 1$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು $\frac{1}{\phi-1}$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ; ಇದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಂತೆ, ϕಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಜೊತೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 5ರ ಮೂರನೇ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲಾದ ವ್ಯಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದಾಗ, ವ್ಯಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಹಾಗು ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳ ಅನುಪಾತವು, ಮೂಲ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವ್ಯಾರಿಗ್ನೋನ್ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸುರಳಿಗಳು.



ಚಿತ್ರ 7. ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಪರ್ಯಾಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು.

ಮನೋರಂಜನಾ ಆಸಕ್ತಿಯಿಂದ, ಚಿತ್ರ 5ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮೊದಲ ಎರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪವಿಭಾಗ ಮಾಡುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 6ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆಗ, ಸುವರ್ಣ ಆಯತದಲ್ಲೂ ಮೂಡಿಸಬಹುದಾದಂತೆ ಮನೋಜ್ಞವಾಗಿ ಕಾಣುವ ಸುರುಳಿಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು.

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಂತೆಯೇ, 'ಸುವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋನ' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ವಿಭಿನ್ನ ಪರಿಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕ ಸಹ 'ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ' ವನ್ನು ರಚನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು; ಅಂದರೆ ಒಂದು 36° ಇರುವ ಕೋನ ಮತ್ತು ಎರಡು 72° ಕೋನಗಳು ಇರುವ ಸಮ್ಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ (ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಬಾಹುವು ಪಾದಕ್ಕೆ ϕ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸುವ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಓದುಗರಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.) ಆದ್ದರಿಂದ, ಚಿತ್ರ 7ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾದ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಸುವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತ ಅರ್ಧ ತಿರುಗಿಸಬೇಕು. ಆಗ, ϕ (ಅಡಿಟಿಪ್ಪಣಿ 5[5] ನೋಡಿ) ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 7ರ ಎರಡನೇ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ನಾವು ಸುವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೂಡ ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮೂರನೆಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸುವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಪಾದದ ಸುತ್ತ ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಬಾಹು ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವ

[5] ಲೋಎಬ್ ಮತ್ತು ವಾರ್ನೆ (1992, ಪುಟಗಳು. 53-54) ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು 72°ಯ ಲಘುಕೋನವಿರುವ ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಅಂತಹ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ, ಚಿಕ್ಕ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ತತ್ಕಾರಣ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸುವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂಡಿದ 'ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು' ಮಟ್ಟಸವಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಕಾಣಲು ಆಹ್ಲಾದಕರವಾಗಿ ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ, ಅದು ನಿಯಮಿತ ಪಂಚಭುಜ, ದಶಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವುದಲ್ಲದೆ, ನಿಯಮಿತ ಪಂಚಭುಜಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮತಲವನ್ನು ಹಂಚಿನಂತೆ ತುಂಬಿಸಲೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತೀಯ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಈ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ದೃಶ್ಯ ಸೌಂದರ್ಯ ಹಾಗು ಅದರ ಗಣಿತೀಯ ಪ್ರಸ್ತುತತೆಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಒತ್ತು ನೀಡಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಇದು ಉತ್ತಮ ನಿದರ್ಶನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಲೇಖನದ ಭಾಗ-2 ರಲ್ಲಿ, ನಾವು ಸುವರ್ಣ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳ, ಸುವರ್ಣ ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿಗಳ, ಮತ್ತು ಸುವರ್ಣ ಷಡ್ಭುಜಗಳ ಕೆಲವು ಶಕ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸೋಣ.

ಆಕರಗಳು

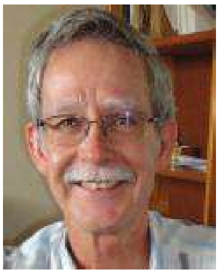
1. ಡಿ ವಿಲ್ಲಿಯರ್ಸ್, ಎಂ. (2009) *ಸಮ್ ಅಡ್ವೆಂಚರ್ಸ್ ಇನ್ ಯೂಕ್ಲೀಡಿಯನ್ ಜ್ಯಾಮೆಟ್ರಿ*. ಲುಲು ಪ್ರೆಸ್
2. ಅರ್ನೆಸ್ಟ್, ಪಿ. (1991). *ದ ಫಿಲಾಸಫಿ ಆಫ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಎಜುಕೇಷನ್*, ಲಂಡನ್, ಫಲ್ಮೆರ್ ಪ್ರೆಸ್
3. ಫ್ರೂಡೆಂತಲ್, ಹೆಚ್. (1973). *ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಆಸ್ ಆನ್ ಎಜುಕೇಷನಲ್ ಟಾಸ್ಕ್*. ಡಿ.ರೀಡೆಲ್, ಡಾಡ್ರೆಕ್ಟ್, ಹಾಲೆಂಡ್.
4. ಗ್ರೋಸ್ಮನ್, ಪಿ. ಮುಂತಾದವರು (2009). ಡು ಪೀಪಲ್ ಪ್ರಿಫರ್ ಇರ್ರ್ಯಾಷನಲ್ ರೇಷ್ಯೂಸ್? ಎ ನ್ಯೂ ಲುಕ್ ಅಟ್ ದ ಗೋಲ್ಡನ್ ಸೆಕ್ಷನ್. ಬಾಂಬರ್ಗ್ ವಿ.ವಿ.ಯ ಆನ್ವಯಿಕ ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ 2008/2009ರಲ್ಲಿ ನಡೆಸಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಶೋಧನೆ. ಇದನ್ನು 23 ಅಕ್ಟೋಬರ್ 2016ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದು ಓದಲಾಯಿತು. ಇದರ ಕೊಂಡಿ ಇಲ್ಲಿದೆ: https://www.academia.edu/3704076/The_Golden_Ratio
5. ಲೋಯೆಬ್, ಎ. ಎಲ್. ಮತ್ತು ವಾರ್ನೆ, ಡಬ್ಲ್ಯೂ. (1992). ಡಸ್ ದ ಗೋಲ್ಡನ್ ಸ್ಪೈರಲ್ ಎಕ್ಸಿಸ್ಟ್, ಅಂಡ್ ಇಫ್ ನಾಟ್, ವೇರ್ ಈಸ್ ಇಟ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್? ಹರ್ಗಿಟ್ಟೈ, ಐ. ಮತ್ತು ಪಿಕ್‌ಓವರ್, ಸಿ.ಎ. (1992) ನಲ್ಲಿ. *ಸ್ಪೈರಲ್ ಸಿಮಿಲಾರಿಟಿ*, ಸಿಂಗಪೂರ್: ವಾರ್ಲ್ಡ್ ಸೈಂಟಿಫಿಕ್, ಪುಟಗಳು. 47-63
6. ಸೆರ್ರಾ, ಎಂ. (2008, ಆವೃತ್ತಿ 4). *ಡಿಸ್ಕವರಿಂಗ್ ಜ್ಯಾಮೆಟ್ರಿ: ಎನ್ ಇನ್ವೆಸ್ಟಿಗೇಟಿವ್ ಅಪ್ರೋಚ್*, ಎಮೆರಿವಿಲ್: ಕೀ ಕರಿಕ್ಯುಲಮ್ ಪ್ರೆಸ್
7. ಸ್ಟೀಗರ್, ಎಸ್. & ಸ್ವಾಮಿ, ವಿ. (2015). ಟೈಮ್ ಟು ಲೆಟ್ ಗೊ? ನೊ ಆಟೊಮ್ಯಾಟಿಕ್ ಏಸ್ತೆಟಿಕ್ ಪ್ರಿಫರೆನ್ಸ್ ಫಾರ್ ದ ಗೋಲ್ಡನ್ ರೇಷ್ಯೂ ಇನ್ ಆರ್ಟ್ ಪಿಕ್ಚರ್ಸ್. *ಸೈಕೋಲಜಿ ಆಫ್ ಏಸ್ತೆಟಿಕ್ಸ್, ಕ್ರಿಯೇಟಿವಿಟಿ ಅಂಡ್ ದ ಆರ್ಟ್ಸ್*, ಸಂಚಿಕೆ 9(1), ಫೆಬ್ರವರಿ, 91-100. http://dx.doi.org/10.1037/a0038506
8. ವಾಲ್ಸೆರ್, ಹೆಚ್. (2001). *ದ ಗೋಲ್ಡನ್ ಸೆಕ್ಷನ್*. ವಾಷಿಂಗ್‌ಟನ್, ಡಿಸಿ: ದ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಅಸೋಸಿಯೇಷನ್ ಆಫ್ ಅಮೇರಿಕ.

ಅಂತ್ಯ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

1. ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವಲ್ಲ. (ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ: ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಎರಡು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.) ನಾನು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಸಮಮಿತಿಯ ಅಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆಯಾಗಿ ಹಾಗು ಹೆಚ್ಚು ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಒತ್ತಿಹೇಳಲು ಬಯಸುತ್ತೇನೆ. ಡಿವಿಲ್ಲಿಯರ್ಸ್ (2001) 'ಸಿಂಪ್ಲಿ ಸಿಮೆಟ್ರಿಕ್'ನಲ್ಲಿ ವಾದಿಸಿದಂತೆ, ಸಮ್ಮಿತಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲಕರ. ಆಕರ: ಡಿ ವಿಲ್ಲಿಯರ್ಸ್, ಎಂ. (2011). ಸಿಂಪ್ಲಿ ಸಿಮೆಟ್ರಿಕ್. *ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಟೀಚಿಂಗ್*, ಮೇ 2011, ಪುಟ 34-36.
2. ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತವನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಸರಳವಾದುದ್ದು ಹೀಗಿದೆ: $x = 1 + 1/x$ ಇಲ್ಲಿ ನ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಯಾವುದೋ ಅದು. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, $x^2 = x + 1$ ಇಲ್ಲಿ ನ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಯಾವುದೋ ಅದು. ಆಗಿರುವಾಗಿನ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ x. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು $x = (\sqrt{5} + 1)/2$, ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ, ಇದರ ಬೆಲೆಯು

ಸರಿಸುಮಾರು 1.618034. ಆಯತದ ಉದ್ದ:ಅಗಲವು $x : 1$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸುವರ್ಣ ಆಯತವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ವಿಶಿಷ್ಟತೆಯೆಂದರೆ, ನಾವು ಅದರಿಂದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಭವನೀಯ ಚೌಕವನ್ನು (ಒಂದು 1×1 ಚೌಕ) ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ, ಮಿಕ್ಕ ಆಯತವು ಮತ್ತೆ ಸುವರ್ಣ ಆಯತವಾಗಿಯೇ ಉಳಿದಿರುತ್ತದೆ.

3. ಸುವರ್ಣ ಆಯತ ಎಂಬ ಪದವು ಈಗ ಅಧಿಕೃತ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಸುವರ್ಣ ವಜ್ರಾಕೃತಿ, ಸುವರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಸುವರ್ಣ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸುವರ್ಣ ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿ ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಂಚ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಲೇಖಕರು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ.



ಮೈಕಲ್ ಡಿ ವಿಲ್ಲಿಯರ್ಸ್ ಸಂಶೋಧಕರಾಗಿ, ಗಣಿತದ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನದ ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿ ವಿಶ್ವದಾದ್ಯಂತ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಿದ್ದಾರೆ. 1991ರಿಂದ ಡರ್ಬನ್ ವೆಸ್ಟ್‌ವಿಲ್ಲ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ (ಈಗ ಅದು ಕ್ವಾಜುಲುನೆಟಲ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ) ಭಾಗವಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಅಸೋಸಿಯೇಷನ್ ಆಫ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಎಜುಕೇಷನ್ ಆಫ್ ಸೌತ್ ಆಫ್ರಿಕದ ಸಂಶೋಧಕ ನಿಯತಕಾಲಿಕವಾದ ಪೈಥಾಗರಸ್‌ನ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿದ್ದರು, ಮತ್ತು 1997ರಿಂದ ಎಸ್‌ಎ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಒಲಂಪಿಯಾಡಿನ ಉಪಾಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಮುಖ್ಯ ಸಂಶೋಧನಾ ಆಸಕ್ತಿಗಳು ರೇಖಾಗಣಿತ, ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳು, ಅನ್ವಯಗಳು ಮತ್ತು ಮಾಡೆಲಿಂಗ್, ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹಾರ, ಮತ್ತು ಗಣಿತದ ಇತಿಹಾಸ.
http://dynamicmathematics-learning.com/homepage4.html ಅವರ ಹೋಮ್ ಪೇಜ್.
ಅವರು ಡೈನಮಿಕ್ ಜ್ಯಾಮಿಟ್ರಿ ಸ್ಕೆಚ್‌ಗಳಿಗಾಗಿ ವೆಬ್ ಪುಟಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಾರೆ.
http://dynamicmathematicslearning.com/JavaGSPLinks.htm
ಅವರ ಸಂಪರ್ಕ ಕೊಂಡಿ: profmd@mweb.co.za

ಅನುವಾದ : ಸಹನಾ ರಾವ್

ಅಂಕಿ ಪದಬಂಧಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ

ಪುಟ 43

		(1) 7				(2) 2		
	(3) 7	2	(4) 9		(5) 3	8	(6) 1	
(7) 3	7		(8) 3	8	0		(9) 2	0
	(10) 7	(11) 2	0		(12) 8	(13) 5	4	
		1				0		
	(14) 3	6	(15) 6		(16) 5	0	(17) 6	
(18) 6	0		(19) 7	4	7		(20) 1	3
	(21) 1	(22) 1	1		(23) 9	(24) 9	7	
		2				1		